

ENSINO MÉDIO

PROBLEMA COM A MATEMÁTICA? SOLUÇÃO...



Capítulo 5: Composição de Funções

Introdução

A função $g(x) = 2x + 3$ definida sobre todos os números reais toma um número real, tal como $x = 2$, e o "converte" (ou o mapeia) no número real 7. Da mesma forma, a função $f(x) = 5 - 4x$, também definida sobre todos os reais, toma um número, tal como $x = 7$, e o mapeia em -23 .

A ação de uma função seguida pela ação de uma outra função é chamada composição de funções, o assunto deste capítulo.

A notação para a composição de duas funções é algumas vezes dada, formalmente, por

$$f \circ g$$

representando a idéia abstrata de função, ou como

$$(f \circ g)(x)$$

representando o valor da função composta em x .

Contudo, na notação mais descritiva $f(g(x))$, fica mais evidente qual função é substituída em qual outra, revelando como, realmente, a regra para a composição de funções é determinada. A regra para a função "interna", $g(x)$ indica que esta deve ser substituída por x na função "externa", $f(x)$.

Na prática, a parte mais difícil de se trabalhar com funções compostas está em se determinar o domínio e a imagem da composição. Apenas valores de x contidos no domínio de $g(x)$ são candidatos para o domínio da composição $f(g(x))$. No entanto, se algum x leva $g(x)$ a assumir um valor que não está incluído no domínio de $f(x)$, então este valor de x não pode ser incluído no domínio da composição $f(g(x))$.

Além disso, se a regra para a função composta $f(g(x))$ admite um valor não admissível para $g(x)$, então este valor não pode ser incluído no domínio da composição. Um exemplo pode ser dado por $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$, para as quais a regra de composição é dada por

$$f(g(x)) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

Ao observar-se a regra $f(g(x)) = x$, existe uma tendência a acreditar-se que o domínio são todos os reais. Porém, considerando-se que o domínio de $g(x) = \frac{1}{x}$ exclui $x = 0$, tem-se que o domínio da função composta também deve excluir $x = 0$.

▼ Índice de Termos

Os seguintes termos, neste capítulo, têm conexão com o Dicionário do Maple; para mais informações vá em [Dicionário Matemático](#).

[assíntota](#)

[não-negativo](#)

[limitado](#)

[imagem](#)

[composição](#)

[número real](#)

[domínio](#)

▼ Problemas Típicos

Para as funções $f(x)$ e $g(x)$, dadas nos Problemas 5.1 - 5.2,

- (a) determinar o [domínio](#) e a [imagem](#) de ambas, $f(x)$ e $g(x)$;
- (b) obter a [composição](#) $f(g(x))$ estimar $f(g(a))$, traçar o gráfico da composição e determinar seu domínio e imagem;
- (c) obter a composição de $g(f(x))$, estimar $g(f(a))$, traçar o gráfico da composição e determinar seu domínio e imagem.

5.1. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $a = 1$

5.2. $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $a = 2$

▼ Inicializações do Maple

Antes de acessar a versão do Maple para as soluções do problemas típicos apresentados acima, inicialize o Maple apertando o botão à direita.

Inic...

▼ Soluções

▼ Problema 5.1

▼ 5.1 - Solução Matemática

▼ 5.1 (a) - Solução Matemática

As regras $f(x)$ e $g(x)$ possuem seus domínios e imagens especificadas na Tabela 5.1.1, onde o símbolo $\Re$ denota o conjunto dos números reais.

Regra	Domínio	Imagem
$f(x) = \sqrt{x+1}$	$\{x \in \Re, x \geq -1\}$	$\{y \in \Re, y \geq 0\}$
$g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$	$\{x \in \Re\}$	$\{y \in \Re, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$

Tabela 5.1.1 Regras $f(x)$ e $g(x)$, com seus domínios e imagens

O domínio e a imagem para $f(x)$ podem ser deduzidos a partir das propriedades da função raiz quadrada, ou a partir do gráfico de $f(x)$ na Figura 5.1.1(a).

O domínio para $g(x)$ pode ser deduzido de sua regra, mas a imagem pode apenas ser aproximada a partir do gráfico na Figura 5.1.1(b).

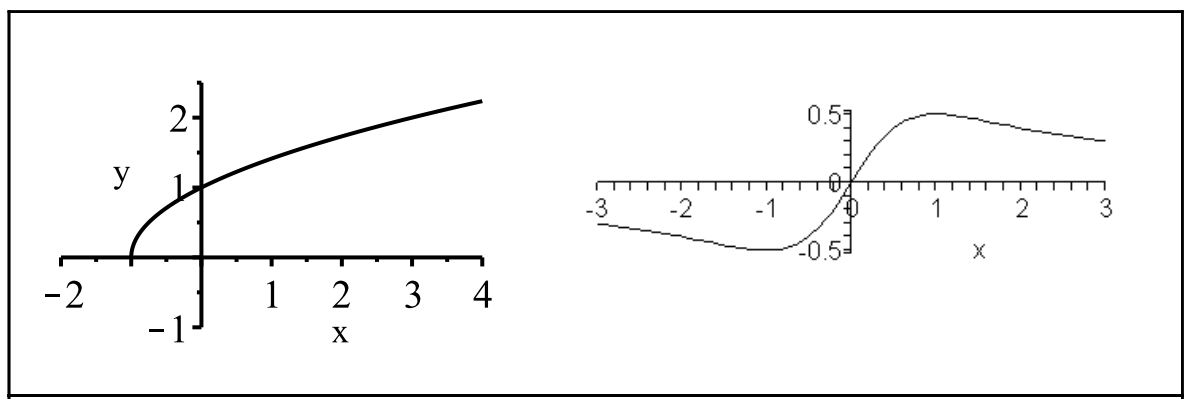


Figura 5.1.1(a) Gráfico de $f(x) = \sqrt{x+1}$

Figura 5.1.1(b) Gráfico de $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

A determinação da altura exata para a qual uma função tal como $g(x)$ cresce é bastante difícil apenas com o auxílio das ferramentas da álgebra. O cálculo numérico é bastante sugestivo, como indica a Tabela 5.1.2.

x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
$g(x)$	0.488	0.497	0.500	0.498	0.492

Tabela 5.1.2 Valores de $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

5.1 (b) - Solução Matemática

A regra para a composição $f \circ g$ é

$$f(g(x)) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1} + 1}$$

Em $x = 1$ tem-se

$$f(g(1)) = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Um gráfico desta composição aparece na Figura 5.1.2.

Os valores mínimo e máximo da fração

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ são } -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2}, \text{ respectivamente.}$$

Isto implica que os valores mínimo e máximo de $f(g(x))$ serão $\sqrt{1/2}$ e $\sqrt{3/2}$, respectivamente.

Portanto, $g(x)$ fornece a $f(x)$ apenas valores no domínio de $f(x)$, de forma que não haverá valor no domínio de $g(x)$ que não possa ser passado para $f(x)$.

Conseqüentemente, a Figura 5.1.2 sugere, corretamente, que o domínio e imagem da composição $f(g(x))$ são, respectivamente, os números reais, e o intervalo

$$\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right].$$

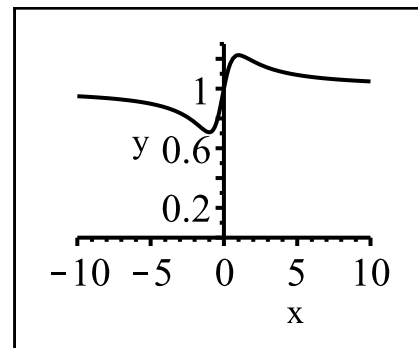


Figura 5.1.2 Gráfico de $f(g(x)) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1} + 1}$

5.1 (c) - Solução Matemática

A regra para a **composição** $g \circ f$ é dada por:

$$g(f(x)) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$$

Em $x = 1$ temos $g(f(1)) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

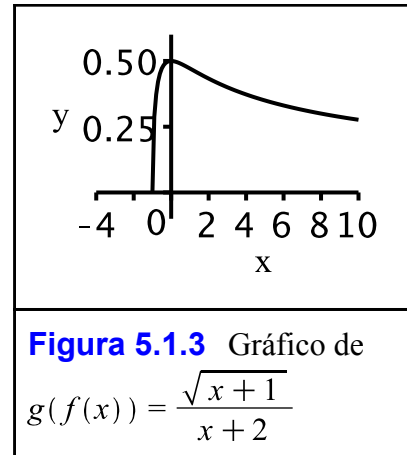
Um gráfico desta composição aparece na Figura 5.1.3.

Esta figura sugere que o **domínio** para a composição $g(f(x))$ é o conjunto dos **números reais** x , onde $x > -1$, enquanto a imagem é dada pelo intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

O domínio de $f(x)$ é o conjunto dos números reais x para os quais $x > -1$, enquanto a imagem de $f(x)$ é o conjunto dos números reais não negativos.

Se $g(x)$ é dado como um número real não negativo, este não poderá gerar um número real não negativo maior que $\frac{1}{2}$.

Conseqüentemente, a Figura 5.1.3 sugere o domínio e a imagem corretos para a composição $g(f(x))$.



5.1 - Solução via Maplet

5.1 (a) - Solução via Maplet

As regras $f(x)$ e $g(x)$ possuem seus **domínios** e **imagens** especificadas na Tabela 5.1.1, onde o símbolo $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos **números reais**.

Regra	Domínio	Imagem
$f(x) = \sqrt{x+1}$	$\{x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$	$\{y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$
$g(x) = \frac{x}{x^2+1}$	$\{x \in \mathbb{R}\}$	$\{y \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$

Tabela 5.1.1 Regras $f(x)$ e $g(x)$, com seus domínios e imagens

O domínio e a imagem para $f(x)$ podem ser deduzidos a partir das propriedades da função raiz quadrada ou de seu gráfico. O domínio para $g(x)$ pode ser deduzido por esta regra, mas a imagem pode apenas ser aproximada pelo gráfico. Os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ podem ser obtidos com o [Tutorial de Composição](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 5.1.4.

Este tutorial apresenta o gráfico de $f(x)$, $g(x)$, e a escolha entre a composição de funções $f(g(x))$ ou $g(f(x))$.

A determinação da altura exata para a qual uma função tal como $g(x)$ cresce torna-se difícil apenas com as ferramentas da álgebra.

Para iniciar o **Tutorial de Composição**, clique no seguinte link: [Tutorial de Composição](#).

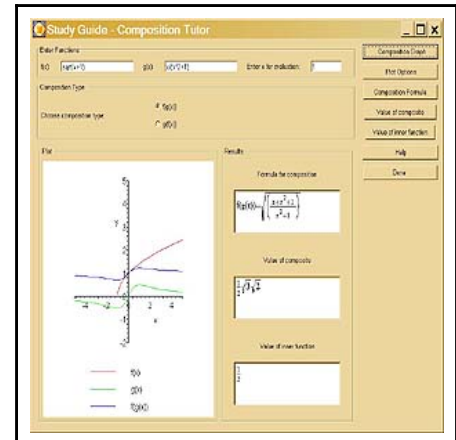


Figura 5.1.4 Imagem do Tutorial de Composição

5.1 (b) - Solução via Maplet

O [Tutorial de Composição](#) fornecerá a função $f(g(x))$, isto é, a regra para a composição.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 5.1.5.

Além dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $f(g(x))$, são dados também os valores destas três funções em $x = 1$.

Este tutorial mostra que a regra para a composição $f \circ g$ é:

$$f(g(x)) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1} + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$$

O tutorial exibe também o valor da composição em $x = 1$, que é dado por

$$f(g(1)) = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3}$$

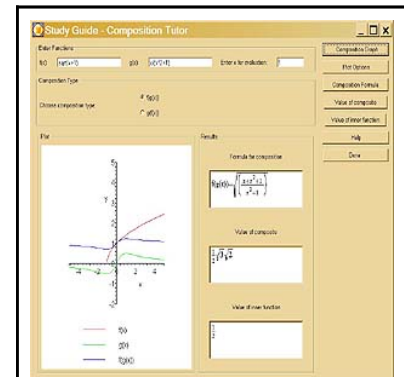


Figura 5.1.5 Imagem do Tutorial de Composição

Para esta composição, o **Tutorial de Composição** também apresenta um gráfico similar ao da Figura 5.1.6, uma reprodução da Figura 5.1.2.

Os valores máximo e mínimo da fração

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ são } -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2}, \text{ respectivamente.}$$

Isto implica que os valores máximo e mínimo de

$$f(g(x)) \text{ serão dados por } \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ e } \sqrt{\frac{3}{2}},$$

respectivamente. Desta maneira, $g(x)$ fornece a

$f(x)$ apenas valores no **domínio** de $f(x)$. Portanto, não há valores no domínio de $g(x)$ que não possam ser passados para $f(x)$. Consequentemente, o gráfico acima sugere corretamente que o domínio e a **imagem** da composição $f(g(x))$ são, respectivamente, os reais e o intervalo

$$\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right].$$

Para iniciar o **Tutorial de Composição**, clique no seguinte link: [Tutorial de Composição](#).

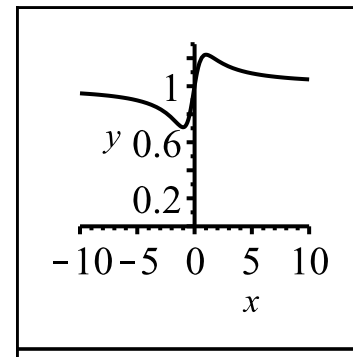


Figura 5.1.6 Gráfico de $f(g(x))$

$$= \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1} + 1}$$

5.1 (c) - Solução via Maplet

O [Tutorial de Composição](#) fornece $g(f(x))$, isto é, a regra para a **composição** $g \circ f$.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 5.1.6

Além dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $g(f(x))$, também são dados os valores destas três funções em $x = 1$.

Este tutorial mostra que a regra para a composição $g \circ f$ é

$$g(f(x)) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$$

O tutorial mostra também que em $x = 1$ tem-se

$$g(f(1)) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Para esta composição, o **Tutorial de Composição** também fornece um gráfico similar ao da Figure

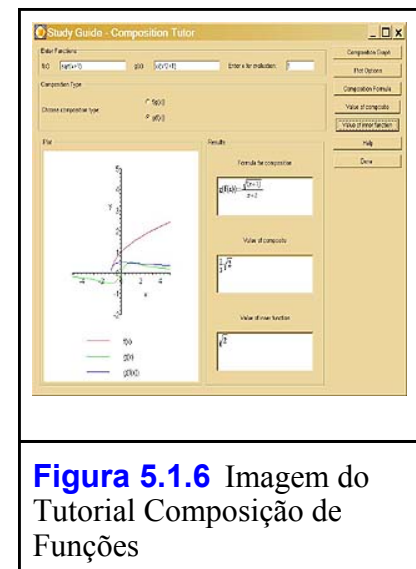


Figura 5.1.6 Imagem do Tutorial Composição de Funções

5.1.7, uma reprodução da Figura 5.1.3.

Esta figura sugere que o domínio para a composição $g(f(x))$ é o conjunto dos números reais x , tal que $x > -1$, enquanto a imagem é dada pelo intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

O domínio de $f(x)$ é o conjunto dos números reais x para os quais $x > -1$, enquanto a imagem de $f(x)$ é o conjunto dos números reais não-negativos. Se $g(x)$ é dada por número real não-negativo, esta produzirá um número real não negativo não maior que $\frac{1}{2}$.

Consequentemente, a figura acima sugere o domínio e a imagem corretos para a composição $g(f(x))$.

ara iniciar o **Tutorial de Composição**, clique no seguinte link: [Tutorial de Composição](#).

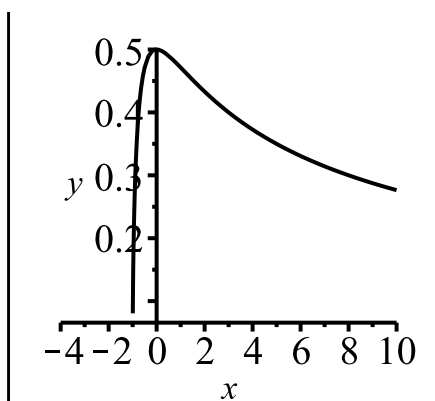


Figura 5.1.7 Gráfico de

$$g(f(x)) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$$

▼ 5.1 - Solução Interativa

▼ 5.1 (a) -Solução Interativa

- Insira a regra para $f(x)$.
- Menu de Contexto: Gráficos>Construtor de Gráficos> $-3 \leq x \leq 3$

O domínio e a imagem de $f(x)$ pode ser inferida deste gráfico.

O domínio é o conjunto de todos os números reais x satisfazendo $x \geq -1$, enquanto a imagem é o conjunto de todos os números reais y satisfazendo $y \geq 0$.

- Insira a regra para $g(x)$.
Menu de Contexto: Associe a um Nome> g
- Menu de Contexto: Gráficos>Construtor de Gráficos> $-7 \leq x \leq 7$

O domínio e a imagem de $g(x)$ pode ser inferido do seu gráfico.

Parece que o domínio de $g(x)$ é o conjunto de todos os números reais, mas a imagem está no intervalo fechado $[-1/2, 1/2]$. O gráfico sugere que o ponto mais baixo e o mais alto de no gráfico de $g(x)$ são $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, respectivamente. Esta hipótese é confirmada pelos seguintes cálculos.

•

- Digite g e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
 Otimização > Assistente de Otimização
 Vínculos e Fronteiras > Editar
 Adicionar Fronteira > $x = -2 \dots 2$ >
 Adicionar > Feito
 Minimizar > Resolver > Gráfico
 Maximizar > Resolver > Gráfico

5.1 (b) - Solução Iterativa

Insira as funções dadas	
• Usando o modelo $f := a \rightarrow y$ da paleta Expressão, defina a função f.	
• Usando o modelo $f := a \rightarrow y$ da paleta Expressão, defina a função g.	
Obtenha a composição $f(g(x))$ e faça o gráfico	
• Digite $f(g(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-10 \leq x \leq 10$ Opções > $0 \leq y \leq 1.3$	
Cálculos em $x = a = 1$	
• Digite $f(g(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Avaliar em um Ponto > 1 • Digite $g(1)$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome > ga • Digite $f(ga)$ e pressione a tecla Enter.	
Domínio e Imagem da composição $f(g(x))$	
A Figura 5.1.2 sugere que o domínio para a composição $f(g(x))$ é o conjunto de números reais, onde a imagem é um conjunto fechado localizado no ponto $y = 1$. As melhores ferramentas para determinar os valores máximo e o mínimo de uma função são desenvolvidos no cálculo. Aqui, entretanto, podemos fazer o seguinte. Os valores mínimos e máximos da fração $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ são $-1/2$ e $1/2$, respectivamente. Isto implica que os valores máximo e mínimo de $f(g(x))$ serão $\sqrt{1/2}$ e $\sqrt{3/2}$, respectivamente.	

Portanto, $g(x)$ insere para $f(x)$ apenas valores no domínio de $f(x)$, então não existem valores no domínio de $g(x)$ que não podem ser inseridas em $f(x)$. Consequentemente, a Figura 5.1.2 corretamente que o domínio e a imagem da composição $f(g(x))$ a ser respectivamente, os reais, e o intervalo $[\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2}]$.

Os valores extremos de $g(x)$ podem ser obtidos numericamente como se segue.

- Digite g e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
 Otimização > Assistente de Otimização
 Vínculos e Fronteiras > Editar
 Adicionar Fronteira > $x = -2 \dots 2$ >
 Adicionar > Feito
 Minimizar > Resolver > Gráfico
 Maximizar > Resolver > Gráfico

5.1 (c) - Solução Interativa

Insira as funções dadas	
• Usando o modelo $f := a \rightarrow y$ da paleta Expressão, defina a função f .	
• Usando o modelo $g := a \rightarrow y$ da paleta Expressão, defina a função g .	
Obtenha a composição $g(f(x))$ e faça o gráfico	
• Digite $g(f(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-4 \leq x \leq 10$ Opções > $-\frac{1}{10} \leq y \leq \frac{3}{5}$ Opções > Número de Pontos > 1000	
Avaliações em $x = a = 1$	
• Digite $g(f(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Avaliar em um Ponto > 1 • Digite $f(1)$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome > ga • Digite $g(fa)$ e pressione a tecla Enter.	
Domínio e Imagem da composição $g(f(x))$	

A Figura 5.1.3 sugere que o domínio para a composição $g(f(x))$ é o conjunto de números reais x , onde $x \geq -1$, e a imagem é o intervalo $[0, 1/2]$.

O domínio de $f(x)$ é o conjunto de números reais x para os quais $x \geq -1$, enquanto a imagem de $f(x)$ é o conjunto de reais não-negativos.

Se $g(x)$ é dado como um número real não negativo, irá produzir um número real não negativo não maior que $1/2$.

Consequentemente, Figura 5.1.3 sugere o domínio correto e a imagem para a composição $g(f(x))$.

O valor máximo da composição $g(f(x))$ pode ser determinado numericamente pelo Assistente de Otimização.

- Digite $g(f(x))$ e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Otimização>Assistente de Otimização
Maximizar>Resolver>Gráfico

▼ 5.1 - Solução via Comandos do Maple

▼ 5.1 (a) - Solução via Comandos do Maple

Insira as funções f e g .	$f := x \rightarrow \sqrt{x+1};$ $g := x \rightarrow \frac{x}{x^2+1}$
Faça o gráfico de f como na Figura 5.1.1(a).	$> \text{plot}(f, -3..3)$
Deste gráfico, ou da regra para f , veja que o domínio de f é o intervalo $[-1, \infty)$, e a imagem é o intervalo $[0, \infty)$.	
Faça o gráfico de g como na Figura 5.1.1(b).	$> \text{plot}(g, -7..7)$
Que o domínio de g é o conjunto de todos os números reais pode ser inferido da Figura 5.1.1(b). É mais difícil de determinar que a imagem é o intervalo $[-1/2, 1/2]$.	
Obtenha o mínimo e o máximo para g . Os comandos minimize e maximize dão como resultado os valores extremos bem como as coordenadas x onde os extremos ocorrem.	$> \text{minimize}(g(x), \text{location})[2];$ $\text{maximize}(g(x), \text{location})[2]$

5.1 (b) - Solução via Comandos do Maple

Insira as funções f e g .	$f := x \rightarrow \sqrt{x+1};$ $g := x \rightarrow \frac{x}{x^2+1}$
Obtenha a composição $f(g(x))$.	$fg := f(g(x))$
Obtenha $f(g(1))$.	$eval(fg, x=1)$
Obtenha $g(1)$.	$g(1)$
Obtenha $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(g(1))$.	$f\left(\frac{1}{2}\right)$
Faça o gráfico de $f(g(x))$, então obtendo Figura 5.1.2.	$plot(f(g(x)), x=-10..10, y=0..1.3)$
A Figura 5.1.2 sugere que o <u>domínio</u> para a composição $f(g(x))$ é o conjunto de <u>números reais</u>, onde a imagem é um <u>conjunto fechado</u> localizado no ponto $y = 1$. As melhores ferramentas para determinar os valores máximo e o mínimo de uma função são desenvolvidos no cálculo. Aqui, entretanto, podemos fazer o seguinte. Os valores mínimos e máximos da fração $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ são $-1/2$ e $1/2$, respectivamente. Isto implica que os valores máximo e mínimo de $f(g(x))$ serão $\sqrt{1/2}$ e $\sqrt{3/2}$, respectivamente. Portanto, $g(x)$ insere para $f(x)$ apenas valores no domínio de $f(x)$, então não existem valores no domínio de $g(x)$ que não podem ser inseridas em $f(x)$. Consequentemente, a Figura 5.1.2 corretamente que o domínio e a imagem da composição $f(g(x))$ a ser respectivamente, os reais, e o intervalo $[\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2}]$.	
Obtenha o máximo e o mínimo para $f(g(x))$. Os comandos minimize e maximize dão como resultado os valores extremos bem como as coordenadas x onde os extremos ocorrem.	$minimize(f(g(x)), location)[2];$ $maximize(f(g(x)), location)[2]$

5.1 (c) - Solução via Comandos do Maple

Insira as funções f e g .	$f := x \rightarrow \sqrt{x+1};$ $g := x \rightarrow \frac{x}{x^2+1}$
Obtenha a composição $g(f(x))$.	$gf := g(f(x))$

Compute $g(f(1))$.	> $eval(gf, x = 1)$
Obtenha $f(1)$.	> $f(1)$
Obtenha $g(\sqrt{2}) = g(f(1))$.	> $g(\sqrt{2})$
Faça o gráfico de $g(f(x))$, então obtendo Figura 5.1.3.	> $plot\left(gf, x = -4 \dots 10, y = -\frac{1}{10} \dots \frac{3}{5}, \right.$ $\left. numpoints = 3000 \right)$
A Figura 5.1.3 sugere que o domínio para a composição $g(f(x))$ é o conjunto de números reais x, onde $x \geq -1$, e a imagem é o intervalo $[0, 1/2]$. O domínio de $f(x)$ é o conjunto de números reais x para os quais $x \geq -1$, enquanto a imagem de $f(x)$ é o conjunto de reais não-negativos. Se $g(x)$ é dado como um número real não negativo, irá produzir um número real não negativo não maior que $1/2$. Consequentemente, a Figura 5.1.3 sugere o domínio correto e a imagem para a composição $g(f(x))$.	
Obtenha o máximo e o mínimo para $f(g(x))$. Os comandos minimize e maximize dão como resultado os valores extremos bem como as coordenadas x onde os extremos ocorrem.	> $maximize\left(gf, x = -\frac{1}{2} \dots 3, \right.$ $\left. location \right)[2]$

▼ Problema 5.2

▼ 5.2 - Solução Matemática

▼ 5.2 (a) - Solução Matemática

As regras $f(x)$ e $g(x)$ possuem seus **domínios** e **imagens** especificadas na Tabela 5.1.1, onde o símbolo $\Re$ denota o conjunto dos **números reais**.

Regra	Domínio	Imagem
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	$\{x \in \Re, x \neq -1\}$	$\{y \in \Re, y \neq 1\}$
$g(x) = \frac{1}{x-1}$	$\{x \in \Re, x \neq 1\}$	$\{y \in \Re, y \neq 0\}$
Tabela 5.2.1 Regras $f(x)$ e $g(x)$, com seus domínios e imagens		

O domínio e a imagem para $f(x)$ podem ser deduzidos a partir das propriedades da função $\frac{x}{x+1}$, ou a partir do gráfico de $f(x)$ na Figura 5.2.1(a).

A assíntota vertical cuja equação $x = -1$, e a assíntota horizontal é $y = 1$ determine o domínio e a imagem, respectivamente.

Consequentemente, o domínio consiste em todos os números reais exceto o número -1 , onde a imagem consiste de todos os números reais exceto o número 1 .

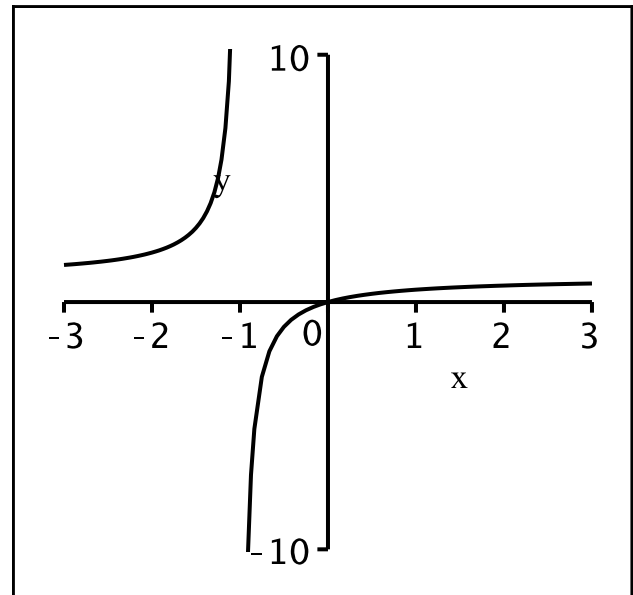


Figura 5.2.1(a) Gráfico de $f(x) = \frac{x}{x+1}$

O domínio e a imagem para $g(x)$ podem ser deduzidos a partir das propriedades da função $\frac{1}{x-1}$, ou a partir do gráfico de $g(x)$ na Figura 5.2.1(b).

A assíntota vertical cuja equação $x = 1$, e a assíntota horizontal é $y = 0$ determine o domínio e a imagem, respectivamente.

Consequentemente, o domínio consiste em todos os números reais exceto o número 1 , onde a imagem consiste de todos os números reais exceto o número 0 .

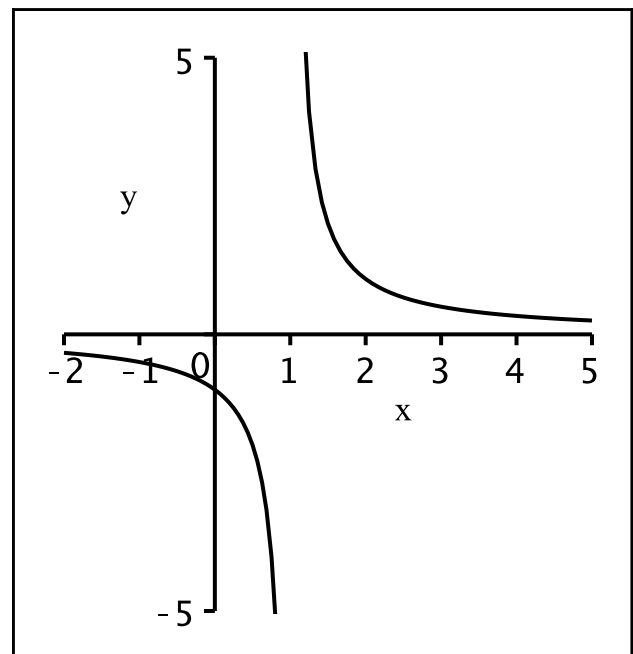


Figura 5.2.1(b) Gráfico de $g(x) = \frac{1}{x-1}$

5.2 (b) - Solução Matemática

A regra para a composição $f \circ g$ é

$$f(g(x)) = \frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1} + 1} = \frac{1}{1+x-1} = \frac{1}{x}$$

Em $x = 2$ temos $f(g(2)) = \frac{1}{2}$.

Um gráfico desta composição aparece na Figura 5.2.2.

A Figura 5.2.2 sugere que o **domínio** para a composição $f(g(x))$ é o conjunto dos **números reais** x que satisfazem $x \neq 0$, enquanto a **imagem** é o conjunto dos números reais y que satisfazem $y \neq 0$. Contudo, esta é uma visão ingênua. Uma análise mais sofisticada se faz necessária.

A função "interna" $g(x) = \frac{1}{x-1}$ não é definida em $x = 1$. Sendo assim, o domínio da composição $f(g(x))$ não pode conter $x = 1$. Além disso, a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ não é definida em $x = -1$. É preciso determinar qual valor no domínio de $g(x)$, caso exista, corresponde ao valor -1 para $f(x)$. Portanto, é preciso resolver a equação

$$g(x) = \frac{1}{x-1} = -1$$

obtendo

$$1 = 1 - x$$

de onde segue que $x = 0$. Desta maneira, os dois números reais $x = 0$ e $x = 1$ não podem fazer parte do domínio da composição $f(g(x))$. Consequentemente, se $x = 1$ não estiver no domínio de $f(g(x)) = \frac{1}{x}$, então $y = 1$ não estará na imagem da composição. Portanto, a imagem de $f(g(x))$ é o conjunto dos números reais y , exceto pelos valores $y = 0$ e $y = 1$.

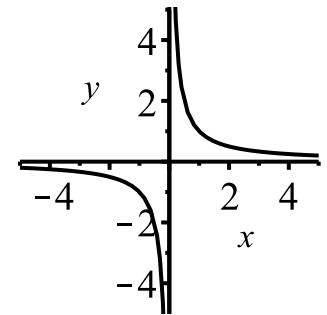


Figura 5.2.2 Gráfico de $f(g(x)) = \frac{1}{x}$

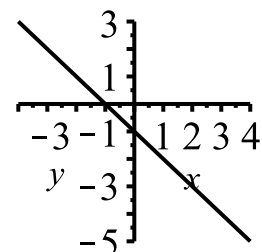
5.2 (c) - Solução Matemática

A regra para a **composição** $g \circ f$ is

$$g(f(x)) = \frac{1}{\left(\frac{x}{x+1}\right) - 1} = \frac{x+1}{x-x-1} = -(x+1)$$

Em $x = 2$ nós temos $g(f(2)) = -3$.

Um gráfico desta composição aparece na Figura 5.2.3.



Pode parecer da Figura 5.2.3 que ambos o domínio e a imagem da composição $g(f(x)) = -x - 1$ são todos os números reais. Contudo, esta é uma visão ingênua. Exige-se uma análise mais sofisticada.

Figura 5.2.3 Gráfico de $g(f(x)) = -(x + 1)$

O domínio de $f(x) = \frac{x}{x+1}$ é o conjunto de todos os números reais x para os quais $x \neq -1$, enquanto a imagem de $f(x)$ é o conjunto de todos os reais y para os quais $y \neq 1$. Sendo assim, $f(x)$ nunca resultará no valor 1 para $g(x)$, o qual é o único valor não aceito por este, de forma que o único número real x que não se encontra no domínio da composição é $x = -1$. Neste caso, como $x = -1$ não é definido pela regra $g(f(x)) = -x - 1$, então a imagem da composição não contém $y = 0$.

O domínio da composição $g(f(x))$ é o conjunto dos números reais x para os quais $x \neq -1$, enquanto a imagem é o conjunto dos números reais y para os quais $y \neq 0$.

5.2 - Solução via Maplet

5.2 (a) - Solução via Maplet

As regras $f(x)$ e $g(x)$ possuem seus domínios e imagens especificadas na Tabela 5.2.1, onde o símbolo $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.

Regra	Domínio	Imagem
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	$\{x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$	$\{y \in \mathbb{R}, y \neq 1\}$
$g(x) = \frac{1}{x-1}$	$\{x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$	$\{y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

Tabela 5.2.1 Regras $f(x)$ e $g(x)$, com seus domínios e imagens

O domínio e a imagem para $f(x)$ podem ser deduzidos a partir das propriedades da fração $\frac{x}{x+1}$ ou pelo seu gráfico. A assíntota vertical cuja equação é $x = -1$ e a assíntota horizontal $y = 1$ determinam seu domínio e imagem, respectivamente

O domínio e a imagem de $g(x)$ podem ser deduzidos a partir das propriedades da fração $\frac{1}{x-1}$ ou pelo seu gráfico. A assíntota vertical cuja equação é $x = 1$ e a assíntota

horizontal $y = 0$ determinam seu domínio e imagem, respectivamente.

O gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ podem ser obtidos por meio do [Tutorial de Composição](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 5.2.4.

Este tutorial apresenta o gráfico de $f(x)$, $g(x)$, e a escolha entre a composição de funções $f(g(x))$ ou $g(f(x))$.

Para iniciar o **Tutorial de Composição**, clique no seguinte link: [Tutorial de Composição](#).

5.2 (b) - Solução via Maplet

O [Tutorial de Composição](#) fornecerá a função $f(g(x))$, isto é, a regra para a composição. $f \circ g$.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 5.2.5.

Além dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $f(g(x))$, são dados também os valores destas três funções em $x = 2$.

Este tutorial mostra que a regra para a composição $f \circ g$ é:

$$f(g(x)) = \frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1} + 1} = \frac{1}{1+x-1} = \frac{1}{x}$$

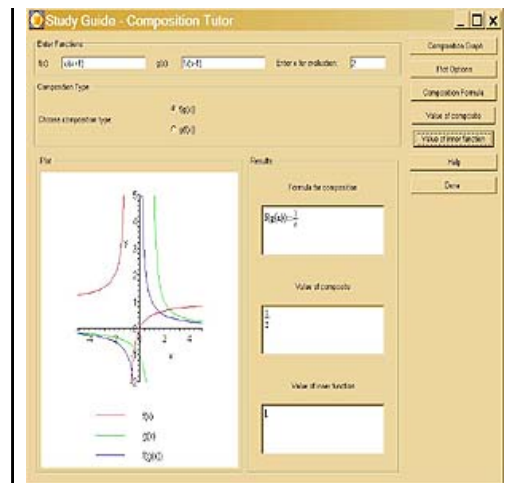


Figura 5.2.4 Imagem do Tutorial de Composição

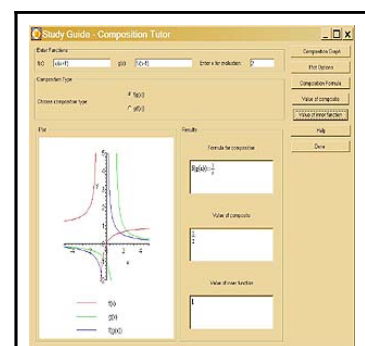


Figura 5.2.5 Imagem do Tutorial de Composição

Mostra também que em $x = 2$ tem-se $f(g(2)) = \frac{1}{2}$.

Para esta composição, o **Tutorial de Composição** também apresenta um gráfico similar ao da Figura 5.2.6, uma reprodução da Figura 5.2.2.

Um gráfico da composição $f(g(x))$ sugere que o domínio é o conjunto dos números reais x que satisfazem $x \neq 0$, e a imagem é o conjunto dos números reais y que satisfazem $y \neq 0$. Contudo, esta é uma idéia ingênua e uma análise mais sofisticada faz-se necessária.

A função "interna" $g(x) = \frac{1}{x-1}$ não é definida em $x = 1$. Portanto, o domínio da composição $f(g(x))$ não contém $x = 1$. Além disso, a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ não é definida em $x = -1$. É preciso determinar qual valor no domínio de $g(x)$, se existe, corresponde ao valor -1 para $f(x)$. Desta maneira, é preciso resolver a equação

$$g(x) = \frac{1}{x-1} = -1$$

obtendo

$$1 = 1 - x$$

de onde segue que $x = 0$. Sendo assim, os dois números reais 0 e 1 não podem estar contidos no domínio da composição $f(g(x))$. Consequentemente, se $x = 1$ não está no domínio da regra $f(g(x)) = \frac{1}{x}$, então $y = 1$ não está na imagem da composição.

Portanto, a imagem de $f(g(x))$ é o conjunto dos números reais y , exceto pelos dois valores $y = 0$ e $y = 1$.

Para iniciar o **Tutorial de Composição**, clique no seguinte link: [Tutorial de Composição](#).

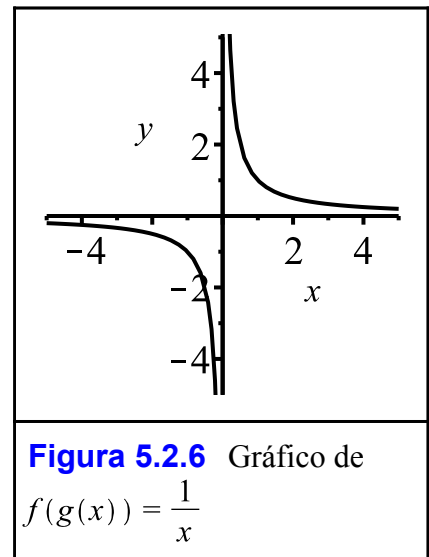


Figura 5.2.6 Gráfico de $f(g(x)) = \frac{1}{x}$

5.2 (c) - Solução via Maplet

O [Tutorial de Composição](#) fornece a $g(f(x))$ a regra para a composição $g \circ f$.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 5.2.7.



Além dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $f(g(x))$, são dados também os valores destas três funções em $x = 2$.

Este tutorial apresenta a regra para a composição $g \circ f$:

$$g(f(x)) = \frac{1}{\left(\frac{x}{x+1}\right) - 1} = \frac{x+1}{x-x-1} = -(x+1)$$

Mostra, também, que em $x = 2$ tem-se $g(f(2)) = -3$.

Para esta composição, o **Tutorial de Composição** também apresenta um gráfico similar ao da Figura 5.2.8, uma reprodução da Figura 5.2.3.

A Figura 5.2.3 sugere que o domínio e a imagem da composição $f(g(x)) = -x - 1$ são todos os números reais. Contudo, esta é uma visão ingênua e uma análise mais sofisticada faz-se necessária.

O domínio de $f(x) = \frac{x}{x+1}$ é o conjunto de números reais x para os quais $x \neq -1$, enquanto a imagem de $f(x)$ é o conjunto de reais y para os quais $y \neq 1$. Portanto, $f(x)$ não irá nunca dar $g(x)$ o valor 1, o qual é o único valor que este não pode receber, tal que o único real x não contido no domínio da composição é $x = -1$. Agora, se $x = -1$ não irá nunca ser dado pela regra $g(f(x)) = -(x+1)$, enquanto a imagem da composição nunca irá conter $y = 0$.

O domínio da composição $g(f(x))$ é o conjunto de números reais x para os quais $x \neq -1$, onde a imagem é o conjunto de números reais y para os quais $y \neq 0$.

Para iniciar o **Tutorial de Composição**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial de Composição](#).

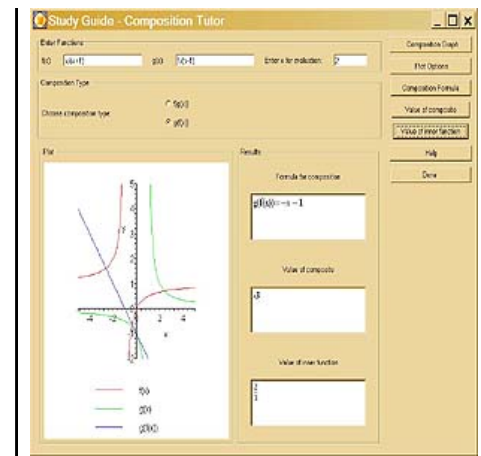


Figura 5.2.7 Imagem do Tutorial de Composição

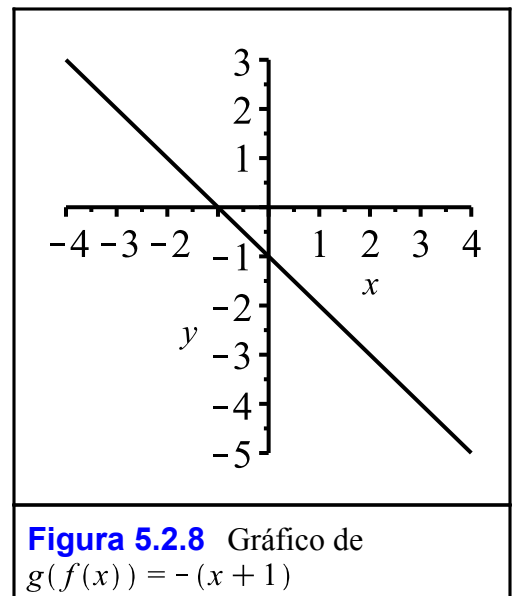


Figura 5.2.8 Gráfico de $g(f(x)) = -(x+1)$

5.2 - Solução Interativa

5.2 (a) - Solução Interativa

• Insira a regra para $f(x)$. • Menu de Contexto: Gráficos>Construtor de Gráficos> $-3 \leq x \leq 3$ Opções> $-10 \leq y \leq 10$ Opções> Encontrar Descontinuidades	
O <u>domínio</u> e a <u>imagem</u> de $f(x)$ pode ser inferida deste gráfico. O domínio é o conjunto de todos os <u>números reais</u> x satisfazendo $x \neq -1$, enquanto a imagem é o conjunto de todos os números reais y satisfazendo $y \neq 1$.	
• Insira a regra para $g(x)$. - Menu de Contexto: Associe a um Nome>g • Menu de Contexto: Gráficos>Construtor de Gráficos> $-7 \leq x \leq 7$ Opções> $-5 \leq y \leq 5$ Opções> Encontrar Descontinuidades	
O domínio e a imagem de $g(x)$ pode ser inferido do seu gráfico. Consequentemente, o domínio de $g(x)$ consiste em todos os números reais x para os quais $x \neq 1$, onde a imagem consiste de todos os números reais para os quais $y \neq 0$.	

5.2 (b) -Solução Interativa

Insira as funções dadas	
• Usando o modelo $f := a \rightarrow y$ da paleta Expressão, defina a função f.	
• Usando o modelo $f := a \rightarrow y$ da paleta Expressão, defina a função g.	
Obtenha a composição $f(g(x))$ e faça o gráfico	
• Digite $f(g(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos>Construtor de Gráficos $-5 \leq x \leq 5$ Opções> $-5 \leq y \leq 5$	
Cálculos em $x = a = 2$	
•	

• Digite $f(g(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Avaliar em um Ponto $\triangleright 2$ • Digite $g(2)$ • Menu de Contexto: Associe a um Nome $\triangleright ga$ • Digite $f(ga)$ e pressione a tecla Enter	
Domínio e Imagem da composição $f(g(x))$	
A função "interna" $g(x) = \frac{1}{x-1}$ não é definida em $x = 1$. Sendo assim, o domínio da composição $f(g(x))$ não pode conter $x = 1$. Além disso, a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ não é definida em $x = -1$. É preciso determinar qual valor no domínio de $g(x)$, caso exista, corresponde ao valor -1 para $f(x)$. Portanto, é preciso resolver a equação $g(x) = -1$:	
Insira a Equação $g(x) = -1$ Context Menu: Resolver $\triangleright$ Resolver	
Desta maneira, os dois números reais $x = 0$ e $x = 1$ não podem fazer parte do domínio da composição $f(g(x))$. Conseqüentemente, se $x = 1$ não estiver no domínio de $f(g(x)) = \frac{1}{x}$, então $y = 1$ não estará na imagem da composição. Portanto, a imagem de $f(g(x))$ é o conjunto dos números reais y, exceto pelos valores $y = 0$ e $y = 1$.	

5.2 (c) - Solução Interativa

Insira as funções dadas	
• Usando o modelo $f := a \rightarrow y$ da paleta Expressão, defina a função f.	
• Usando o modelo $f := a \rightarrow y$ da paleta Expressão, defina a função g.	
Obtenha a composição $g(f(x))$ e faça o gráfico	
• Digite $g(f(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos $\triangleright$ Construtor de Gráficos $-4 \leq x \leq 4$	
Avaliações em $x = a = 2$	
• Digite $g(f(x))$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Avaliar em um Ponto $\triangleright 2$ •	

- Digite $f(2)$
- Menu de Contexto: Associe a um Nome $\rightarrow ga$
- Digite $g(fa)$ e pressione a tecla Enter.

Domínio e Imagem da composição $g(f(x))$

Pode parecer da Figura 5.2.3 que ambos o domínio e a imagem da composição $f(g(x)) = -x - 1$ são todos os números reais. Contudo, esta é uma visão ingênua. Exige-se uma análise mais sofisticada.

O domínio de $f(x) = \frac{x}{x+1}$ é o conjunto de todos os números reais x para os quais $x \neq -1$, enquanto a imagem de $f(x)$ é o conjunto de todos os reais y para os quais $y \neq 1$. Sendo assim, $f(x)$ nunca resultará no valor 1 para $g(x)$, o qual é o único valor não aceito por este, de forma que o único número real x que não se encontra no domínio da composição é $x = -1$. Neste caso, como $x = -1$ não é definido pela regra $g(f(x)) = -x - 1$, então a imagem da composição não contém $y = 0$.

O domínio da composição $g(f(x))$ é o conjunto dos números reais x para os quais $x \neq -1$, enquanto a imagem é o conjunto dos números reais y para os quais $y \neq 0$.

5.2 - Solução via Comandos do Maple

5.2 (a) - Solução via Comandos do Maple

Insira as funções f e g .	$f := x \rightarrow \frac{x}{x+1};$ $g := x \rightarrow \frac{1}{x-1}$
Faça o gráfico de f como na Figura 5.2.1 (a).	$\text{plot}(f(x), x=-3..3, y=-10..10, \text{discont} = \text{true})$
O domínio de f é o conjunto de todos os <u>números reais</u> x satisfazendo $x \neq -1$, enquanto a imagem é o conjunto de todos os números reais y satisfazendo $y \neq 1$.	
Faça o gráfico de g como na Figura 5.2.1 (b).	$\text{plot}(g(x), x=-2..5, y=-5..5, \text{discont} = \text{true})$
O domínio e a imagem de $g(x)$ pode ser inferido do seu gráfico na Figura 5.2.1(b).	
O domínio de $g(x)$ consiste em todos os números reais x para os quais $x \neq 1$, onde a imagem consiste de todos os números reais para os quais $y \neq 0$.	

5.2 (b) - Solução via Comandos do Maple

Insira as funções f e g .	$f := x \rightarrow \frac{x}{x+1};$
-------------------------------	-------------------------------------

	$g := x \rightarrow \frac{1}{x-1}$
Obtenha a composição $f(g(x))$.	> $fg := \text{simplify}(f(g(x)))$
Obtenha $f(g(2))$.	> $\text{eval}(fg, x=2)$
Obtenha $g(2)$.	> $g(2)$
Obtenha $f(1) = f(g(2))$	> $f(1)$
Faça o gráfico de $f(g(x))$, então obtendo Figura 5.2.2.	> $\text{plot}(f(g(x)), x=-5..5, y=-5..5)$
Um gráfico da regra $f(g(x)) = \frac{1}{x}$ aparece na Figura 5.2.2, uma figura que parece sugerir que o domínio para a composição $f(g(x))$ é o conjunto de números reais x satisfazendo $x \neq 0$, e a imagem é o conjunto de números reais y satisfazendo $y \neq 0$. Contudo, esta é uma idéia ingênua e uma análise mais sofisticada faz-se necessária. A função "interna" $g(x) = \frac{1}{x-1}$ não é definida em $x = 1$. Portanto, o domínio da composição $f(g(x))$ não contém $x = 1$. Além disso, a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ não é definida em $x = -1$. É preciso determinar qual valor no domínio de $g(x)$, se existe, corresponde ao valor -1 para $f(x)$. Desta maneira, é preciso resolver a equação $g(x) = -1$, obtendo $x = 0$, como visto pelo próximo cálculo.	
Resolva a equação $g(x) = -1$.	> $\text{solve}(g(x) = -1, x)$
Sendo assim, os dois números reais 0 e 1 não podem estar contidos no domínio da composição $f(g(x))$. Conseqüentemente, se $x = 1$ não está no domínio da regra $f(g(x)) = \frac{1}{x}$, então $y = 1$ não está na imagem da composição. Portanto, a imagem de $f(g(x))$ é o conjunto dos números reais y, exceto pelos dois valores $y = 0$ e $y = 1$.	

5.2 (c) - Solução via Comandos do Maple

Insira as funções f e g .	> $f := x \rightarrow \frac{x}{x+1};$ > $g := x \rightarrow \frac{1}{x-1}$
Obtenha a composição $g(f(x))$.	> $gf := \text{simplify}(g(f(x)))$
Compute $g(f(2))$	> $\text{eval}(gf, x=2)$
Obtenha $f(2)$.	> $f(2)$

Obtenha $g(2/3) = g(f(2))$.	> $g(2/3)$
Faça o gráfico de $g(f(x))$, então obtendo Figura 5.1.3.	> $plot(gf, x=-4..4)$
Um gráfico da regra $g(f(x)) = -(x + 1)$ aparece na Figura 5.2.3, uma figura que parece sugerir que o domínio para a composição $g(f(x))$ é o conjunto de todos os números reais x, e a imagem é o conjunto de números reais y. Contudo, esta é uma idéia ingênua e uma análise mais sofisticada faz-se necessária. O domínio de $f(x) = \frac{x}{x+1}$ é o conjunto de todos o números reais x para os quais $x \neq -1$, enquanto a imagem de $f(x)$ é o conjunto de todos os reais y para os quais $y \neq 1$. Sendo assim, $f(x)$ nunca resultará no valor 1 para $g(x)$, o qual é o único valor não aceito por este, de forma que o único número real x que não se encontra no domínio da composição é $x = -1$. Neste caso, como $x = -1$ não é definido pela regra $g(f(x)) = -x - 1$, então a imagem da composição não contém $y = 0$. O domínio da composição $g(f(x))$ é o conjunto dos números reais x para os quais $x \neq -1$, enquanto a imagem é o conjunto dos números reais y para os quais $y \neq 0$.	

▼ Exercícios - Capítulo 5

Para as funções $f(x)$ e $g(x)$ dadas em cada um dos exercícios 5.1 - 5.10,

- determinar o **domínio** e a **imagem** de $f(x)$ e $g(x)$;
- obter a **composição** $f(g(x))$, avaliar $f(g(a))$, traçar o gráfico da composição e determinar seu domínio e imagem;
- obter a composição $g(f(x))$, avaliar $g(f(a))$, traçar o gráfico da composição e determinar seu domínio e imagem.

Os domínios para as funções $f(x)$ e $g(x)$ são o maior conjunto de **números reais** para os quais as regras dadas estão definidas. Estimar graficamente os limites para o domínio e a imagem onde necessário.

5.1. $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = 7 - 5x$, $a = 3$

5.2. $f(x) = 4x + 5$, $g(x) = \sqrt{1 - 2x}$, $a = -2$

5.3. $f(x) = 5x + 7$, $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $a = 2$

5.4. $f(x) = x^2 + 4x + 29$, $g(x) = 4x^2 + x - 6$, $a = 0$

5.5. $f(x) = (3x + 2)^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = x^2 + 6x + 45$, $a = 1$

5.6. $f(x) = |3x - 1|$, $g(x) = 2x + 5$, $a = 2$

5.7. $f(x) = 7x - 2$, $g(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2}$, $a = -1$

5.8. $f(x) = 2 \sin(x)$, $g(x) = x^2 + 1$, $a = 0$

5.9. $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = 5 \cos(2x)$, $a = 1$

5.10. $f(x) = x^2 - 8x + 25$, $g(x) = \sin(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$

